Matematika PITUP

02.09.2014.

–pismeni ispit –

popunjava profesor:

ZADATAK	1.	2.	3.	4.	5.	6.	UKUPNO	OCJENA
BROJ BODOVA								

Uputa. U svakoj grupi zadataka treba za prolaznu ocjenu imati barem 10 bodova i ukupni broj bodova mora biti veći od 30.

I. grupa **Diskretna matematika**

1. Zadana je formula algebre sudova

$$F(x,y,z) = ((\bar{x} \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow \bar{x})) \wedge ((x \Leftrightarrow \bar{x}) \Rightarrow (y \vee \bar{z}))\,.$$

a) Izradite semantičku tablicu. (5 bodova)

b) Minimizirajte formulu. (4 boda)

c) Nacrtajte logički element. (1 bod)

2. Neka je $A = \{-10, -5, 1, 5\}$. Na A je zadana relacija R sa

$$R = \{(x,y) : x - y \leq 0\}.$$

a) Ispišite elemente relacije R. Prikažite relaciju R pomoću vrhova i lukova. (3 boda)

b) Ispitajte koja od svojstava: refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost ispunjava relacija R. (5 bodova)

c) Da li je R relacija ekvivalencije? Da li je R relacija parcijalnog uređaja? Objasnite svoje odgovore! (2 boda)

3. **a)** Ako je $A = \{x \in \mathbb{Z} : |x-4| \leq 2\}$ i $B = \{x \in \mathbb{N} : x \in [-1, 4\rangle\}$, odredite skupove $A \setminus B$ i $\mathcal{P}(A \setminus B)$. (4 boda)

b) Zadan je predikat $P(x,y) =$ "$|x+y|$ je djeljivo s 3" i univerzum razmatranja $\mathcal{U} = \{-3, -1, 1, 4, 6\}$. Ispitajte istinitost sljedećih tvrdnji. Detaljno obrazložite svoje odgovore. (6 bodova)

i) $\forall x \exists y P(x,y)$.

ii) $\forall y \exists! x P(x,y)$.

iii) $\exists x \forall y P(x,y)$.

II. grupa **Linearna algebra**

4. Zadana je matrica A trećeg reda sa

$$a_{ij} = \begin{cases} |i-j| & \text{za } i > j \\ i+j & \text{za } i \leq j. \end{cases}$$

a) Ispišite matricu A. (3 boda)

b) Zadan je polinom $f(x) = 2x^2 - x + 3$. Odredite $f(A)$ (3 boda)

c) Riješite matričnu jednadžbu $A(4X - A)A^{-1} = 3AXA^{-1} + I$. (4 boda)

5. Zadane su matrice A, B i X sa

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

a) Odredite A^{-1}. (4 boda)

b) Riješite sustav $AX = B$ pomoću inverzne matrice. (2 boda)

c) Riješite sustav $AX = B$ Cramerovim postupkom. (4 boda)

6. Zadan je sustav

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 3 \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 1. \end{aligned}$$

a) Gaussovim postupkom odredite opće rješenje sustava tako da x_1 bude parametar. (7 bodova)

b) Kolika je determinanta matrice sustava? (3 boda)

1. Zadana je formula algebre sudova

$$F(x,y,z) = ((\bar{x} \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow \bar{x})) \wedge ((x \Leftrightarrow \bar{x}) \Rightarrow (y \vee \bar{z})).$$

Rj:

x	y	z	F
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Rj: $KNF = (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee \overline{z}) \wedge (x \vee y \vee z)$
$F_{min} = (\overline{y} \wedge x) \vee (\overline{x} \wedge y) = (\overline{x} \vee \overline{y}) \wedge (x \vee y)$

2. Neka je $A = \{-10, -5, 1, 5\}$. Na A je zadana relacija R sa $R = \{(x,y) : x - y \leq 0\}$.

Rj:

$x \backslash y$	-10	-5	1	5
-10	1	1	1	1
-5	0	1	1	1
1	0	0	1	1
5	0	0	0	1

Rj: **refleksivnost** R je simetrična zato jer su sve jedinice na dijagonali matrice incidencije relacije R.

simetričnost R nije simetrična zato jer matrica incidencije nije simetrična matrica.

antisimetričnost R je simetrična: $\forall x, y \in A \ /(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x - y \leq 0 \wedge y - x \leq 0 \Rightarrow x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$.

tranzitivnost R je tranzitivna: $\forall x, y, z \in A \ /(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow x - y \leq 0 \wedge y - z \leq 0 \Rightarrow x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq y \leq z \ x \leq z \Rightarrow x - z \leq 0 \Rightarrow (x,z) \in R$.

Rj: Relacija R NIJE relacija ekvivalencije zato jer nije simetrična.
Relacija R je relacija parcijalnog uređaja zato jer je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

3. **Rj:** $A = \{2,3,4,5,6\}$ $\quad B = \{1,2,3\}$ $\quad A \setminus B = \{4,5,6\}$
$\mathcal{P}(A \setminus B) = \{\emptyset, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,6\}, A \setminus B\}$

Rj: Zadan je predikat $P(x,y) =$ "$|x+y|$ je djeljivo s 3" i univerzum razmatranja $\mathcal{U} = \{-3, -1, 1, 4, 6\}$.

$x \backslash y$	-3	-1	1	4	6
-3	1	0	0	0	1
-1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0
4	0	1	0	0	0
6	1	0	0	0	1

i) $\forall x \exists y P(x,y)$. $\quad \top$, u svakom retku matrice predikata postoji barem jedna jedinica.

ii) $\forall y \exists! x P(x,y)$. $\quad \perp$, npr. u stupcu ispod -3 su dvije jedinice.

iii) $\exists x \forall y P(x,y)$. $\quad \perp$, zato jer ne postoji redak sa samim jedinicama.

4. Zadana je matrica A trećeg reda sa $a_{ij} = \begin{cases} |i-j| & \text{za } i > j \\ i+j & \text{za } i \leq j. \end{cases}$

Rj: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

Rj: $f(A) = 2A^2 - A + 3I = 2\begin{bmatrix} 15 & 22 & 47 \\ 16 & 24 & 54 \\ 17 & 16 & 49 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 41 & 90 \\ 31 & 47 & 103 \\ 32 & 31 & 95 \end{bmatrix}.$

Rj: $4AXA^{-1} - A = 3AXA^{-1} + I$
$AXA^{-1} = I + A$
$X = I + A$

5. Zadane su matrice A, B i X sa

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Rj: $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$

Rj: Riješite sustav $AX = B$ pomoću inverzne matrice. (2 boda)
$X = A^{-1}B = A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix}.$
Rješenje je uređena trojka $(4, -6, -4)$.

Rj: Riješite sustav $AX = B$ Cramerovim postupkom. (4 boda)
$D = -2, \quad D_1 = -8, \quad D_2 = 12, \quad D_3 = 8.$ Rješenje je $(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \frac{D_3}{D}) = (4, -6, -4).$

6. Zadan je sustav

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 3 \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Rj: $(p, 1+p, \frac{3}{2} + \frac{p}{2}), p \in \mathbb{R}.$

Rj: $\det A = 0.$